УДК 681.518:629.7.05
DOI https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.3.2/63

Гриньов М.А.
аспірант кафедри комп'ютерних систем
Національний університет «Одеська політехніка»
ORCID: 0009-0007-7189-4485

ВАРТІСТЬ ЗАПІЗНЕННЯ І ПОМИЛКИ ЧАСОВОЇ МІТКИ СЕНСОРНИХ ДАНИХ У ФІЛЬТРІ КОМПЛЕКСУВАННЯ

Розглянуто вплив часової невизначеності сенсорних даних на точність лінійного фільтра комплексування: дані можуть надходити із запізненням, а їхні часові мітки можуть бути помилковими. Фільтрів для запізнених і асинхронних вимірювань запропоновано багато, однак бракує способу заздалегідь визначити, коли часова невизначеність суттєва і що з нею робити. Мета роботи – розділити втрати точності на вартість віку даних і вартість незнання їхньої часової мітки та встановити, коли часову невизначеність слід трактувати як шум, як систематичну похибку, яку потрібно калібрувати, або як підставу відкинути дані. Показано, що вартість віку правильно позначених даних точно обчислюється кроками рівняння Ріккаті без запізнілого сенсора, і введено напівперіод інформації сенсора у фільтрі. Доведено, що правильна мітка коштує не більше за менше з двох значень: надлишкової похибки наївного використання даних і їхньої залишкової цінності; що постійна помилка мітки на траєкторії повністю переходить у похибку оцінки за будь-якого стабілізувального коефіцієнта підсилення; що калібрування повертає частку вартості мітки, яка визначається точністю оцінки помилки мітки; що змінне запізнення з правильними мітками оцінюється через вік інформації і коштує не більше, ніж стале запізнення з тим самим середнім. Перевірку виконано на моделі повітряних даних безпілотного літального апарата Aerosonde і моделі інерціально-супутникової навігації. Для приймача повітряного тиску напівперіод становить 0,12–0,18 с без акселерометрів і 0,05–0,10 с з акселерометрами, а використання застарілих даних стає гіршим за їхнє відкидання після 0,08–0,36 с, раніше за сильнішої турбулентності; правильна мітка за межами напівперіоду варта не більше 8 %. Для супутникових даних, що коригують інерціальну систему, запізнення 0,2 с коштує не більше 1,4 %, тоді як помилка мітки 5 мс на швидкості 30 м/с збільшує середній квадрат похибки на 12,6 %. На нелінійній моделі літака фільтри з узгодженою моделлю відтворюють результати лінійного аналізу з точністю до 4 %.

Ключові слова: *часова мітка, запізнення вимірювань, вік інформації, фільтр Калмана, комплексування даних, калібрування часу, повітряні дані, супутникова навігація.*

Постановка проблеми. Запізнілі дані та дані з неточними часовими мітками є звичайними для автономних систем: дані повітряних сигналів надходять через шини з затримкою, приймачі супутникової навігації видають розв'язок із запізненням у десятки чи сотні мілісекунд, годинники пристроїв мають зсуви, а часові мітки можуть бути навмисно спотворені. Для обробки запізнілих вимірювань і вимірювань, що надходять не за порядком, розроблено точні та наближені алгоритми [1, 2], а також фільтри з урахуванням тремтіння моментів відліку [3, 4].

Проте проєктувальнику бракує відповіді на попередні питання: скільки точності втрачається через сам вік даних, а скільки – через незнання часової мітки; коли невизначеність часу можна врахувати збільшенням коваріації шуму, коли її потрібно оцінювати (калібрувати), а коли дані вигідніше відкинути. Відповіді визначають, чи варто ускладнювати фільтр і які вимоги ставити до синхронізації сенсорів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Точне оновлення фільтра за вимірюваннями, що надійшли не за порядком, отримано в [1], включення запізнілих вимірювань у дискретний фільтр Калмана – у [2]. У 2024 р. розглянуто фільтрацію з невизначеними та асинхронними моментами вимірювань з відомим запізненням і білим тремтінням моментів [3]; показано, що лінійне оновлення з невизначеністю часу субоптимальне. Фільтр Калмана для процесів з тремтінням інтервалу дискретизації [4] враховує тремтіння як додатковий шум процесу в першому наближенні. Компроміс між запізненням і точністю сприйняття для планування обчислень досліджено в [5]; поняття віку інформації запропоновано в [6]. Онлайн-калібрування часового зсуву між сенсорами та умови його спостережуваності розглянуто в [7, 8].

Ці роботи дають алгоритми, але не розділяють вартість віку даних і вартість помилки мітки, не дають критерію, коли застарілі дані слід відкинути, і не оцінюють, скільки повертає калібрування. Саме ця частина проблеми залишається невирішеною.

Постановка завдання. Метою роботи є кількісний поділ втрат точності фільтра комплексування на вартість віку даних і вартість помилки часової мітки та встановлення правил вибору між збільшенням шуму, калібруванням і відкиданням даних.

Завдання дослідження:

1) отримати точний вираз вартості віку даних і ввести напівперіод інформації сенсора;

2) оцінити зверху цінність правильної мітки і встановити, коли помилка мітки є шумом, а коли систематичною похибкою;

3) оцінити змінне запізнення, тремтіння і цінність калібрування;

4) перевірити результати на двох системах з різною тривалістю збереження інформації та на нелінійній моделі.

Виклад основного матеріалу

Методи дослідження

Використано теорію оцінювання (фільтр Калмана, фільтрація з розширеною історією станів), точні рекурсії других моментів для лінійно-гауссових систем, апарат структурних функцій випадкових процесів і статистичне моделювання на нелінійній моделі з лінійними та розширеними фільтрами Калмана. Програмне забезпечення розроблено автором мовою Python. Прогнози і правила рішень фіксували в протоколах до виконання розрахунків; гіпотези, що не підтвердилися, та відхилення від протоколів наведено в тексті.

Під час дослідження використано генеративну мовну модель Claude (Anthropic) як допоміжний інструмент для пошуку й аналізу літератури, розроблення програмного коду моделювання, перевірки аналітичних викладок, оброблення результатів і підготовки тексту. Усі отримані результати, обчислення та висновки перевірено автором, який несе повну відповідальність за зміст статті.

Математична модель

Розглянемо лінійну модель $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k$, яку спостерігають група своєчасних сенсорів $y_{F,k} = C_F x_k + v_{F,k}$ і сенсор з часовою невизначеністю, показ якого, отриманий на кроці k, дорівнює

$$y_{s,k} = c\, x_{k-m} + v_{s,k}, \qquad \varepsilon = m - \widehat{m}, \qquad (1)$$

де m – істинний вік даних, $\widehat{m}$ – вік за часовою міткою, ε – помилка мітки. Цільова змінна $z = Lx$, критерій – стаціонарна середньоквадратична похибка $J = \mathrm{E}(z - \hat{z})^2$. Розглянуто фільтри: AGE (знає вік і обробляє дані з розширеною історією), NAIVE (довіряє мітці, номінальний шум), INFL (довіряє мітці з найкращим збільшенням коваріації шуму; цей клас містить NAIVE і DROP), DROP (лише своєчасні сенсори) і CAL (оцінює сталу помилку мітки як стан). Припущення: керування є функцією даних (наприклад, керування за оцінкою); якщо керування використовує істинний стан, воно «підказує» стан і наведені нижче нерівності можуть порушуватися.

Теоретичні результати

Лема 1 (вартість віку). Апостеріорна коваріація для даних віку m дорівнює $P_{\text{age}}(m) = \Phi_F^m(P_{\text{all}})$, тобто результату m кроків рівняння Ріккаті лише зі своєчасними сенсорами, починаючи з апостеріорної коваріації для всіх сенсорів. Частка цінності запізнілого сенсора, що залишається через m кроків,

$$V(m) = \frac{J_F - J_{\text{age}}(m)}{J_F - J_0}, \qquad (2)$$

де J_F – похибка без запізнілого сенсора, J_0 – зі своєчасним. **Напівперіод інформації** – вік, за якого $V = 1/2$. Якщо без запізнілого сенсора похибка необмежена ($J_F = \infty$, як для положення інерціальної системи без супутникових даних), інформація стійка і запізнення майже нічого не коштує.

Твердження 1 (цінність правильної мітки). За наведеного припущення $J_{\text{age}} \le J_{\text{infl}} \le \min\left(J_{\text{naive}}, J_{\text{drop}}\right)$ і

$$0 \le W = J_{\text{infl}} - J_{\text{age}} \le \min\left(J_{\text{naive}} - J_{\text{age}},\, V\,(J_F - J_0)\right). \qquad (3)$$

Отже, мітка мало варта, коли інформація запізнілого сенсора вже значною мірою знецінилася.

Твердження 2 (зміщення сигналу і шорсткість). Застарілий показ дорівнює $c\,x_k - c\left(x_k - x_{k-m}\right)$: похибкою є зміщення сигналу за вік, яке має середню (траєкторну) і центровану (збурювальну) складові; дисперсія зміщення – структурна функція вимірюваного сигналу. Для складової, збуреної білим шумом зі сталою часу τ_c, модель першого порядку «швидкість × помилка часу» описує лише близько $\varepsilon/(2\tau_c)$ дисперсії зміщення.

Твердження 3 (траєкторна помилка мітки – систематична похибка). Якщо $Au = u$, $C_F u = 0$ і $cu \neq 0$ (напрям, який бачить лише запізнілий сенсор, наприклад положення вздовж траєкторії), то стала залишкова похибка β у рядку

сенсора дає середню похибку оцінки $\beta u/(cu)$ за будь-якого стабілізувального сталого коефіцієнта підсилення; жодне переналаштування її не усуває, і для положення $W \geq (V_0\varepsilon)^2$, де V_0 – швидкість руху.

Твердження 4 (змінне запізнення). Для незалежних однаково розподілених віків з правильними мітками

$$J_V \approx \sum_d P(\Delta = d) J_{\text{age}}(d), \qquad P(\Delta \geq d) = \prod_i P(m \geq d - i), \quad (4)$$

де Δ – вік інформації фільтра. Оскільки залежність J_{age} від віку увігнута, змінне запізнення з правильними мітками коштує не більше, ніж стале запізнення з тим самим середнім.

Твердження 5 (цінність калібрування). Фільтр, що калібрує сталу помилку мітки, залишає похибку, яка діє як менша помилка мітки:

$$\frac{J_{\text{naive}} - J_{\text{cal}}}{J_{\text{naive}} - J_{\text{age}}} \approx 1 - \frac{\mathrm{E}(\varepsilon - \hat{\varepsilon})^2}{\varepsilon^2}. \quad (5)$$

Умови спостережуваності відомі [7–9]: у прямолінійному русі помилка мітки не відрізняється від похибки положення вздовж траєкторії, на сталому віражі вона змішується з похибкою курсу, і лише зміни кутової швидкості розвороту їх розділяють.

Для кількох сенсорів зі спільним запізненням вартість віку обчислюється послідовністю кроків Ріккаті за рівнями віку; спільне запізнення сенсорів, що взаємно замінюють один одного, є супераддитивним.

Обчислювальний експеримент

Перша система – лінеаризована поздовжня модель БпЛА Aerosonde [9] на швидкості 25 м/с з частотою повітряних даних 20 Гц і турбулентністю Драйдена 15, 30 і 45 вузлів [10]; набори сенсорів S0 (без акселерометрів) і S1-vib (з акселерометрами з шумом 0,5 м/с²); запізнілими могли бути приймач повітряного тиску, шляхова швидкість і барометрична висота з віком 0,05–0,5 с. Друга система – одновісна модель похибок інерціально-супутникової навігації промислового і тактичного класів, без датчика швидкості і з ним, на швидкостях 10 і 30 м/с з малими і великими маневрами та помилками міток 5–200 мс; для калібрування використано плоску модель з розворотами. Усього перший етап охоплював 148 комбінацій умов, другий – перевірку на нелінійній моделі, змінне запізнення, тремтіння і калібрування, третій – розширені фільтри Калмана на нелінійній моделі літака (60 комбінацій).

Результати

Напівперіод і критичний вік повітряних даних. Для приймача повітряного тиску інформація швидко знецінюється (рис. 1): напівперіод становить 0,178; 0,141 і 0,123 с без акселерометрів і 0,099; 0,061 і 0,045 с з акселерометрами за турбулентності 15, 30 і 45 вузлів. Використання застарілого показу з номінальною вагою стає гіршим за відмову від нього після критичного віку 0,355; 0,283; 0,244 с (S0) і 0,188; 0,113; 0,085 с (S1-vib). За межами напівперіоду правильна мітка варта не більше 8 % (попередньо зафіксований поріг 5 % перевищено в 4 із 27 комбінацій, максимум 7,9 %).

Супутникові дані в інерціальній навігації. Інформація супутникових вимірювань положення стійка: запізнення 0,2 с з правильною міткою коштує не більше 1,4 % середнього квадрата похибки. Натомість помилка мітки є систематичною похибкою (твердження 3): 5 мс на швидкості 30 м/с збільшують середній квадрат похибки на

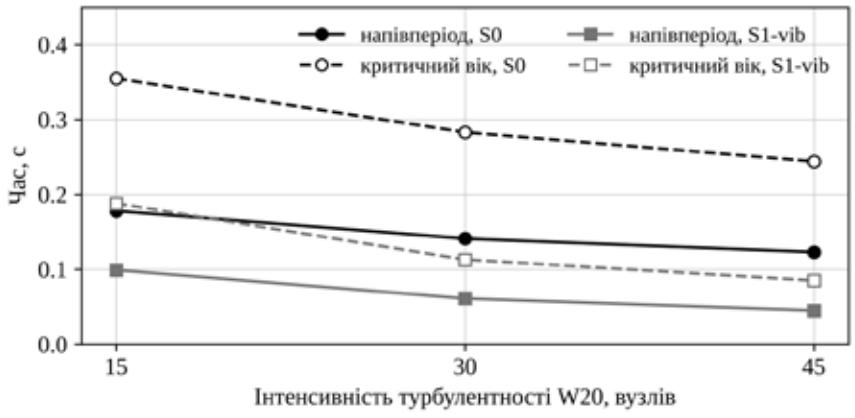


Рис. 1. Напівперіод інформації приймача повітряного тиску і критичний вік, після якого застарілі дані гірші за їх відкидання, залежно від інтенсивності турбулентності (25 м/с)

12,6 %, а 50 мс збільшують середньоквадратичну похибку положення з 0,42 до 1,57 м; збільшення коваріації шуму повертає не більше 1,3 % навіть під час розворотів.

Калібрування. Тотожність (5) виконується з похибкою до 0,017 у 24 із 24 комбінацій. Маневр типу «іподром» із кутовою швидкістю 0,1 рад/с повертає 0,993–0,999 вартості мітки; на сталому віражі середньоквадратична похибка оцінки зсуву становить 9,9–15,7 мс проти 2,8–4,4 мс для «іподрому»; у прямолінійному польоті за помилки 20 мс калібрувальний фільтр гірший, ніж відсутність калібрування, бо оцінка «застигає» на початковому розподілі похибки.

Змінне запізнення і тремтіння. Оцінка (4) збігається з точним розрахунком у межах від −1,1 до +4,1 % у 24 із 24 комбінацій; змінне запізнення з правильними мітками коштує 0,80–0,99 вартості сталого запізнення з тим самим середнім; фіксований параметр затримки, що дорівнює середньому, дає 0,945–0,996 цієї вартості, а збільшення шуму її не зменшує. Порівняння моделі першого порядку з точною дисперсією зміщення наведено в табл. 1: для шорстких сигналів модель першого порядку суттєво занижує похибку. Тремтіння 50 мс для супутникових даних збільшує похибку в 1,4–5,3 раза, і збільшення шуму може зашкодити. Спільне запізнення трьох сенсорів повітряних даних дає втрати до 41 % більші, ніж сума втрат від запізнення кожного з них окремо.

Нелінійна модель літака. Лінійні фільтри зі сталими коефіцієнтами на нелінійній моделі зберігають вартість наївного використання застарілих даних (0,96–1,07 від лінійного прогнозу), але фільтри, що сильніше покладаються на модель, деградують у турбулентності: відкидання приймача – до 5,8 раза, екстраполяція з урахуванням затримки – до 6,4 раза, тому для таких фільтрів лінійний критичний вік є нижньою межею (для S0 за 30 вузлів – 0,3 с за лінійним аналізом проти 0,5 с на нелінійній моделі). Розширені фільтри Калмана з істинною нелінійною моделлю відтворюють лінійні точні значення з відношенням 0,964–1,008 у 60 із 60 комбінацій, відновлюють усі впорядкування фільтрів (18 із 18) і критичний вік (6 із 6), а їхній варіант з урахуванням затримки перевершує лінійний у 12 із 12 комбінацій (наприклад, 0,192 проти 1,040 м²/с²). Попередньо сформульований загальний «закон залежності від моделі» не підтвердився (2 із 16 порівнянь) і не заявляється.

Таблиця 1

Відношення дисперсії зміщення за моделлю першого порядку до точної дисперсії

Вимірювана величина	Відношення	Характер сигналу
повітряна швидкість (приймач, пориви)	0,05–0,12	шорсткий
швидкість від супутникового приймача	0,26–0,31	частково шорсткий
барометрична висота	1,00–1,01	гладкий (інтегрований)
положення від супутникового приймача	1,01	гладкий (інтегрований)

Відхилення. Перевірка нерівностей за керування з використанням істинного стану не пройшла (27 із 296 порушень, до 1,4 %), оскільки таке керування передає фільтру інформацію про стан; з керуванням за оцінкою порушень немає (0 із 296). Це обґрунтовує припущення постановки.

Обговорення результатів. Головний практичний висновок полягає в тому, що характер часової невизначеності визначається не стільки самою затримкою, скільки тим, як довго інформація сенсора зберігає цінність у фільтрі. Для повітряних даних, інформація яких знецінюється за десяті частки секунди, правильна мітка майже нічого не варта, а основне рішення – відкидати чи використовувати застарілі дані; кри-

Таблиця 2

Правила поводження з часовою невизначеністю

Інформація сенсора	Часова невизначеність	Правило
швидко знецінюється (повітряні дані)	стала помилка мітки або запізнення за межами напівперіоду	мітка варта не більше 8 %; після критичного віку дані краще відкинути
швидко знецінюється	змінне запізнення з правильними мітками	оцінюється через вік інформації; не гірше середнього запізнення
стійка (супутникові дані для інерціальної системи)	запізнення	майже безкоштовне (до 1,4 % за 0,2 с)
стійка	стала помилка мітки	систематична похибка; калібрувати під час змін кутової швидкості розвороту
кілька сенсорів одночасно	спільне запізнення	супераддитивні втрати для взаємозамінних сенсорів

тичний вік скорочується зі зростанням турбулентності та за наявності акселерометрів. Для супутникових даних, що коригують інерціальну систему, навпаки, запізнення майже не шкодить, а помилка мітки є систематичною похибкою, яку не можна компенсувати збільшенням шуму: її потрібно калібрувати, і для цього потрібні зміни кутової швидкості розвороту. Моделі першого порядку для помилок часу придатні для інтегрованих величин, але недооцінюють помилки для шорстких сигналів, зокрема для повітряної швидкості в поривах.

Обмеження роботи: лінійно-гауссовий аналіз (частково перевірений на нелінійній моделі); узагальнені характеристики сенсорів без даних конкретних виробів; одновісна модель інерціальної навігації на першому етапі; модель незалежних віків для змінного запізнення; для фільтрів з розширеним фільтром Калмана використано точну нелінійну модель; льотні дані не використано.

Висновки

1. Втрати точності фільтра комплексування через часову невизначеність розділено на вартість віку даних, яка точно обчислюється кроками рівняння Ріккаті, і вартість помилки мітки, обмежену зверху меншим із двох значень – надлишковою похибкою наївного використання і залишковою цінністю даних.

2. Введено напівперіод інформації сенсора у фільтрі: для приймача повітряного тиску БпЛА він становить 0,12–0,18 с без акселерометрів і 0,05–0,10 с з ними; застарілі повітряні дані стають гіршими за їх відкидання після 0,08–0,36 с, раніше за сильнішої турбулентності.

3. Доведено, що стала помилка мітки на траєкторії повністю переходить у похибку оцінки за будь-якого коефіцієнта підсилення; калібрування повертає частку <<Eqn035.eps>> вартості мітки і потребує змін кутової швидкості розвороту.

4. Змінне запізнення з правильними мітками оцінюється через вік інформації і коштує не більше сталого з тим самим середнім; моделі першого порядку суттєво недооцінюють помилки часу для шорстких сигналів; висновки лінійного аналізу справедливі на нелінійній моделі для фільтрів з узгодженою моделлю.

Доцільно отримати аналітичний прогноз цінності правильної мітки між знайденими межами, замкнений вираз напівперіоду, дослідити приховані режими часової невизначеності та перевірити правила на даних конкретних сенсорів і льотних даних.

Бібліографічний список

1. Bar-Shalom Y. Update with out-of-sequence measurements in tracking: exact solution. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2002. Vol. 38, No. 3. P. 769–777.

2. Larsen T. D., Andersen N. A., Ravn O., Poulsen N. K. Incorporation of time delayed measurements in a discrete-time Kalman filter. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, 1998.

3. Brouk J. D., DeMars K. J. Kalman filtering with uncertain and asynchronous measurement epochs. *NAVIGATION: Journal of the Institute of Navigation*. 2024. Vol. 71, No. 3. Art. navi.652. DOI: 10.33012/navi.652.

4. Ibarra-Manzano O. G., Andrade-Lucio J. A., Vazquez Olguin M. A., Shmaliy Y. S. Kalman filter for discrete processes with timing jitter. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2025. Vol. 73. P. 219–228. DOI: 10.1109/TSP.2024.3517158.

5. Aldana-López R., Aragüés R., Sagüés C. Latency vs precision: stability preserving perception scheduling. *Automatica*. 2023. Vol. 155. arXiv:2401.13585.

6. Kaul S., Yates R., Gruteser M. Real-time status: how often should one update? *Proceedings of IEEE INFOCOM 2012*. Orlando, 2012. P. 2731–2735.

7. Li M., Mourikis A. I. Online temporal calibration for camera–IMU systems: theory and algorithms. *The International Journal of Robotics Research*. 2014. Vol. 33, No. 7. P. 947–964.

8. Skog I., Händel P. Time synchronization errors in loosely coupled GPS-aided inertial navigation systems. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2011. Vol. 12, No. 4.

9. Beard R. W., McLain T. W. Small unmanned aircraft: theory and practice. Princeton : Princeton University Press, 2012.

10. MIL-F-8785C. Military specification: flying qualities of piloted airplanes. Washington : U.S. Department of Defense, 1980.

Hrynyov M.A. COST OF DATA AGE AND TIME-STAMP ERROR IN A SENSOR FUSION FILTER

The paper considers the influence of temporal uncertainty of sensor data on the accuracy of a linear fusion filter: data may arrive late, and their time stamps may be wrong. Many filters for delayed and asynchronous measurements have been proposed, yet there is no way to determine in advance when temporal uncertainty matters and what to do about it. The aim of the work is to split the accuracy losses into the cost of the data age

and the cost of not knowing their time stamp, and to establish when temporal uncertainty should be treated as noise, as a systematic error that must be calibrated, or as a reason to drop the data. It is shown that the age cost of correctly stamped data is computed exactly by Riccati steps without the late sensor, and the information half-life of a sensor in the filter is introduced. It is proved that a correct stamp is worth no more than the smaller of two values: the excess error of naive use of the data and their remaining value; that a constant stamp error on a trajectory passes fully into the estimation error for any stabilising gain; that calibration recovers a share of the stamp's worth determined by the accuracy of the stamp-error estimate; that variable latency with correct stamps is priced through the age of information and costs no more than a constant latency with the same mean. Verification is performed on an air-data model of the Aerosonde unmanned aerial vehicle and an inertial/satellite navigation model. For the pitot-static airspeed sensor the half-life is 0.12–0.18 s without accelerometers and 0.05–0.10 s with accelerometers, and using stale data becomes worse than dropping them after 0.08–0.36 s, sooner in stronger turbulence; beyond the half-life a correct stamp is worth no more than 8 %. For satellite data aiding an inertial system a latency of 0.2 s costs no more than 1.4 %, whereas a stamp error of 5 ms at 30 m/s increases the mean square error by 12.6 %. On the nonlinear aircraft model, filters with a consistent model reproduce the results of the linear analysis within 4 %.

Key words: *time stamp, measurement delay, age of information, Kalman filter, data fusion, temporal calibration, air data, satellite navigation.*